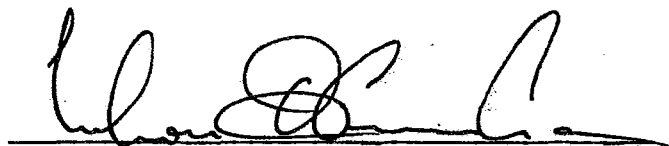


PROGRAMAÇÃO CONTÍNUA: PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES

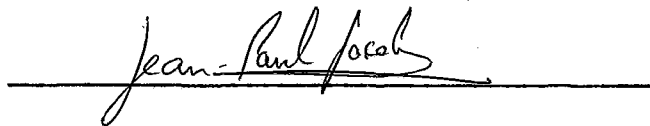
JOSÉ ANTÔNIO ORTEGA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS.

APROVADA POR:



Presidente



RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
NOVEMBRO DE 1971

A Vera

Ao Maurício

AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar sua gratidão a todos que, de uma maneira ou de outra, colaboraram na realização dêste trabalho.

Especialmente:

Ao Professor NELSON ORTEGOSA DA CUNHA, pela valiosa orientação.

Aos Professores PRAVIN VARAYA, RODRIGO RESTREPO e RICHARD SAEKS e demais colegas pelas discussões e sugestões.

À CAPES, pelo apôio financeiro.

À SONIA MARIA ESTRELA CARVALHO, pela sua dedicação no trabalho de datilografia.

RESUMO

O assunto desta tese é o Problema de Programação Contínua, entendido como uma versão contínua de problemas discretos de programação linear. Inicialmente tratamos do caso em que as restrições são lineares, no espaço das funções limitadas e Lebesgue - mensuráveis, apresentando resultados envolvendo uso generalizado de dualidade. Para tratar o caso em que as restrições não são lineares, demonstramos uma versão contínua de um teorema de / "Turnpike", usado na Economia Matemática para processos discretos. Este teorema indica a natureza do comportamento das soluções ótimas quando a duração do processo é suficientemente grande.

ABSTRACT

This thesis is concerned with the Continuous Programming Problem, regarded as a continuous version of discrete problems in linear programming. First we treat the case in which the constraints are linear, in the space of bounded Lebesgue-measurable functions, presenting results involving extensive use of duality. To treat the case when the constraints are not linear, a continuous version of a "Turnpike" theorem, used in Mathematical Economics for discrete processes, is derived. This theorem indicates the nature of the behavior of all optimal solutions when the process time is "large".

ÍNDICE

Páginas:

INTRODUÇÃO	1
1º Capítulo	4
Exemplo Ilustrativo	5
Aplicação ao contróle ótimo	14
Teoremas de existência	16
2º Capítulo, Dualidade	18
Resultados fracos	20
Um teorema de dualidade forte	21
3º Capítulo, Resolução	28
Resolução algorítmica	28
Resolução usando equações diferenciais	29
1º Parte: Método Primal	33
2º Parte: Método Dual	38
4º Capítulo, Programação Contínua com Restrições não Lineares - Um Teorema de "Turnpike" para Processos Contínuos	43
Teorema de "Turnpike"	58
5º Capítulo, Conclusões	64
APÊNDICE, Demonstrações dos Teoremas do 1º Capítulo ..	65
REFERÊNCIAS	73

INTRODUÇÃO

Na análise de processos econômicos, surgem frequentemente problemas de otimização de formas lineares, devendo ser satisfeitas restrições lineares. No atual estágio da teoria da programação linear, uma grande parte desses problemas podem ser resolvidos numericamente, com o emprêgo de computadores e de algoritmo "simplex".

Entretanto, no estudo de processos envolvendo um número moderado de atividades mas um número muito grande de estágios, encontra-se a dificuldade usual da dimensionabilidade, quando são usados métodos computacionais convencionais. Processos dêsse tipo são encontrados na siderurgia e nas indústrias de petróleo e cimento, por exemplo.

É devido a Bellman [1] a idéia de se efetuar versões contínuas de tais problemas, que êle mesmo enfatizou, podem em muitos casos realmente estar mais próximos da realidade do que as versões discretas.

Uma ferramenta essencial nesse tratamento é a versão contínua do problema dual, explorando assim a linearidade do processo.

Assim, no 1º capítulo, apresentamos as origens de tais versões e formulamos o problema geral, particularizando para o caso das restrições serem lineares, quando então temos o problema de programação linear contínua. Estabelecemos também alguns resultados introdutórios sem o uso de dualidade. A definição do

problema dual, resultados fracos é um teorema de dualidade forte são vistos no 2º capítulo.

A resolução pròpriamente dita do problema de programação linear contínua é tratada no 3º capítulo, onde discutimos duas maneiras, uma algorítmica e outra fazendo uso de equações diferenciais.

O 4º Capítulo é dedicado à análise das propriedades das soluções do problema de programação contínua cujas restrições não sejam lineares. Para tanto, é demonstrada uma versão contínua de um teorema de "Turnpike".

Finalmente, no 5º capítulo, fazemos considerações gerais sôbre o assunto tratado e damos sugestões para pesquisas futuras.

OBSERVAÇÕES SOBRE A NOTAÇÃO ADOTADA

Denotaremos por \mathbb{R}^n o conjunto de n-uplas de números reais.

Um vetor x de \mathbb{R}^n será representado por uma matriz coluna; x_i $i = 1, \dots, n$ será a i -ésima componente desse vetor.

A ~~trans~~posta de uma matriz A será escrita A' .

Também, se x e y são vetores de \mathbb{R}^n ,

$$x \geq y \iff x_i \geq y_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x > y \iff x_i \geq y_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{mas exis-}$$

te pelo menos um i tal que $x_i > y_i$

$$x > y \iff x_i > y_i \quad i = 1, \dots, n$$

\mathbb{R}_+^n será o conjunto dos vetores de \mathbb{R}^n tais que $x \geq 0$.

\mathbb{R}_{++}^n o conjunto dos vetores de \mathbb{R}^n tais que $x > 0$.

Como norma de um vetor de \mathbb{R}^n será usada a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^n |x_i| \end{array}$$

1º CAPÍTULO

Para efeito de ilustração, apresentaremos neste capítulo um processo elementar do ponto de vista econômico, mas que apresenta as características citadas acima. Formularemos um problema de otimização em forma discreta associado ao processo, e estabeleceremos sua versão contínua. Finalmente generalizaremos o problema, daremos uma aplicação ao controle ótimo e estabeleceremos alguns resultados introdutórios.

O exemplo será do tipo "Bottleneck", e foi ao estudar um problema desses que Bellman teve a idéia de estabelecer versões contínuas.

EXEMPLO ILUSTRATIVO

Seja um complexo de três indústrias:

De automóveis, de aço e de ferramentas.

Nêste modelo-a parâmetros concentrados- de inter dependência econômica, nós admitiremos que o estado de cada indústria é completamente especificado em qualquer instante pelo seu estoque de matéria prima e pela sua capacidade de produzir novas quantidades usando essa matéria prima. Admitiremos também que é suficiente considerar que mudanças nessa quantidades básicas (estoque e capacidade) ocorrem apenas em tempos discretos $t=0,1,\dots,T_f$.

Definamos então as seguintes variáveis de estado:

$x_1(t)$ = número de autos produzidos até o instante t .

$x_2(t)$ = capacidade de fabricar autos no instante t .

$x_3(t)$ = estoque de aço em t .

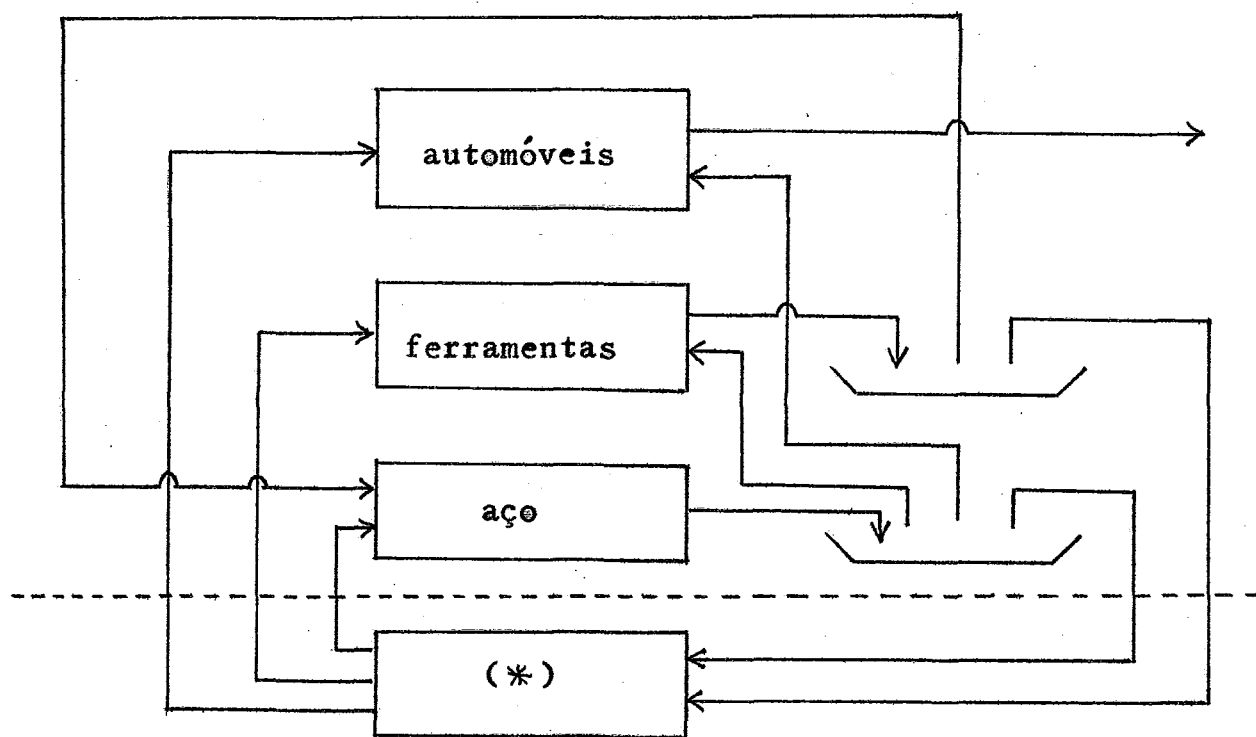
$x_4(t)$ = capacidade de fabricar aço em t .

$x_5(t)$ = estoque de ferramentas em t .

$x_6(t)$ = capacidade de fabricar ferramentas em t .

Hipóteses de interdependência das indústrias:

- (1) Aumento de tôdas as capacidades só requer aumento dos estoques de aço e de ferramentas.
- (2) Produção de autos só requer capacidade de produção de autos e estoque de aço.
- (3) Produção de aço só requer capacidade de produção de aço e estoque de ferramentas.
- (4) Produção de ferramentas requer capacidade de produção de ferramentas e estoque de aço.



(*) Infraestrutura industrial responsável pelo aumento das capacidades.

Dinâmica do processo de produção:

No início de $[t, t+1]$ alocamos uma certa quantidade de aço e ferramentas tomadas de seus estoques, para:

(i) aumentar o estoque dêsses materiais.

(ii) aumentar as capacidades de produção das indústrias.

Definição das variáveis de alocação:

$\bar{v}_i(t)$ = quantidade de aço alocada em t com o propósito de aumentar $x_i(t)$.

$\bar{w}_i(t)$ = quantidade de ferramentas alocada em t com o propósito de aumentar $x_i(t)$.

$$i=1,2,\dots,6$$

OBS:

$$(1), \dots, (4) \Rightarrow \begin{aligned} \bar{v}_3(t) &= 0 \\ \bar{w}_1(t) &= w_5(t) = 0 \end{aligned}$$

Hipótese de "bottleneck":

A quantidade produzida de um item entre os instantes t e $t+1$ é diretamente proporcional ao mínimo das quantidades/ dos itens relevantes ao caso (vide (1), ..., (4)).

Levando em consideração também o fato de que a possibilidade de produção determina os níveis de alocação, pois não há vantagem em se alocar maiores quantidades, teremos as seguintes equações:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + \min \left\{ \gamma_2 x_2(t), \alpha_1 \bar{v}_1(t) \right\}$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \min \left\{ \alpha_2 \bar{v}_2(t), \beta_2 \bar{w}_2(t) \right\}$$

$$x_3(t+1) = x_3(t) + \min \left\{ \gamma_4 x_4(t), \beta_3 \bar{w}_3(t) \right\} - \bar{v}_1(t) - \bar{v}_2(t) - \bar{v}_4(t) - \bar{v}_5(t) - \bar{v}_6(t).$$

$$x_4(t+1) = x_4(t) + \min \left\{ \alpha_4 \bar{v}_4(t), \beta_4 \bar{w}_4(t) \right\}$$

$$x_5(t+1) = x_5(t) + \min \left\{ \gamma_6 x_6(t), \alpha_5 \bar{v}_5(t) \right\} - \bar{w}_2(t) - \bar{w}_3(t) - \bar{w}_4(t) - \bar{w}_6(t)$$

$$x_6(t+1) = x_6(t) + \min \left\{ \alpha_6 \bar{v}_6(t), \beta_6 \bar{w}_6(t) \right\}$$

$$\alpha_i, \beta_i \text{ e } \gamma_i \in \mathbb{R}_{++}$$

A essas equações devemos associar as seguintes restrições naturais:

$$\bar{v}_i(t), \bar{w}_i(t) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,6$$

$$\bar{v}_1(t) + \bar{v}_2(t) + \bar{v}_4(t) + \bar{v}_5(t) + \bar{v}_6(t) \leq x_3(t)$$

$$\bar{w}_2(t) + \bar{w}_3(t) + \bar{w}_4(t) + \bar{w}_6(t) \leq x_5(t)$$

Acrescentaremos também as restrições:

$$\alpha_1 \bar{v}_1(t) \leq \gamma_2 x_2(t)$$

$$\gamma_1 \bar{v}_1(t) \leq x_2(t)$$

$$\beta_3 \bar{w}_3(t) \leq \gamma_4 x_4(t) \quad \text{ou}$$

$$\lambda_3 \bar{w}_3(t) \leq x_4(t)$$

$$\alpha_5 \bar{v}_5(t) \leq \gamma_6 x_6(t)$$

$$\delta_3 \bar{v}_3(t) \leq x_6(t)$$

$$\delta_i, \lambda_i, \varphi_i \in \mathbb{R}_{++}$$

e

$$\alpha_2 \bar{v}_2(t) = \beta_2 \bar{w}_2(t)$$

$$\varphi_2 \bar{v}_2(t) = \bar{w}_2(t)$$

$$\alpha_4 \bar{v}_4(t) = \beta_4 \bar{w}_4(t) \quad \text{ou}$$

$$\varphi_4 \bar{v}_4(t) = \bar{w}_4(t)$$

$$\alpha_6 \bar{v}_6(t) = \beta_6 \bar{w}_6(t)$$

$$\varphi_6 \bar{v}_6(t) = \bar{w}_6(t)$$

que justificaremos como de bom senso, baseados em uma pres-suposta experiência industrial.

Baseados nessas restrições e procurando eliminar o maior número de variáveis, podemos escrever:

$$x_1(t+1) - x_1(t) = \alpha_1 \bar{v}_1(t)$$

$$x_1(0) = x_1^0$$

$$x_2(t+1) - x_2(t) = \alpha_2 \bar{v}_2(t)$$

$$x_2(0) = x_2^0$$

$$x_3(t+1) - x_3(t) = \beta_3 \bar{w}_3(t) - \bar{v}_1(t) - \bar{v}_2(t) - \bar{v}_4(t) - \bar{v}_5(t) - \bar{v}_6(t)$$

$$x_3(0) = x_3^0$$

$$x_4(t+1) - x_4(t) = \alpha_4 \bar{v}_4(t)$$

$$x_4(0) = x_4^0$$

$$x_5(t+1) - x_5(t) = \alpha_5 \bar{v}_5(t) - \varphi_2 \bar{v}_2(t) - \bar{w}_3(t) - \varphi_4 \bar{v}_4(t) - \varphi_6 \bar{v}_6(t)$$

$$x_5(0) = x_5^0$$

$$x_6(t+1) - x_6(t) = \alpha_6 \bar{v}_6(t)$$

$$x_6(0) = x_6^0$$

onde acrescentamos as quantidades iniciais dos itens ($x_i(0)$)

Agrupando as restrições:

$$\bar{v}_i(t) \geq 0$$

$$\delta_1 \bar{v}_1(t) \leq x_2(t)$$

$$\bar{v}_1(t) + \bar{v}_2(t) + \bar{v}_4(t) + \bar{v}_5(t) + \bar{v}_6(t) \leq x_3(t)$$

$$\lambda_3 \bar{w}_3(t) \leq x_4(t)$$

$$\varphi_2 \bar{v}_2(t) + \varphi_4 \bar{v}_4(t) + \varphi_6 \bar{v}_6(t) + \bar{w}_3(t) \leq x_5(t)$$

$$\delta_3 \bar{v}_3(t) \leq x_6(t)$$

Admitamos que o nosso problema seja o de escolher $\bar{v}_i(t)$ $\bar{w}_i(t)$, $t=0,1,\dots, T_f-1$ viáveis para êsse processo e que maximize $x_1(T_f)$.

Versão contínua:

Substituamos $\bar{v}_i(t)$ e $\bar{w}_i(t)$ por $\Delta t v_i(t)$ e $\Delta t w_i(t)$ / nas equações e levemos ao limite quando Δt tende para zero. Teremos então:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 v_1(t)$$

$$x_1(0) = x_1^0$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 v_2(t)$$

$$x_2(0) = x_2^0$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) = & \beta_3 w_3(t) - v_1(t) - v_2(t) - v_4(t) - v_5(t) - \\ & - v_6(t) \end{aligned}$$

$$x_3(0) = x_3^0$$

$$\dot{x}_4(t) = \alpha_4 v_4(t)$$

$$x_4(0) = x_4^0$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5(t) = & \alpha_5 v_5(t) - \varphi_2 v_2(t) - w_3(t) - \varphi_4 v_4(t) - \\ & - \varphi_6 v_6(t) \end{aligned}$$

$$x_5(0) = x_5^0$$

$$\dot{x}_6(t) = \alpha_6 v_6(t)$$

$$x_6(0) = x_6^0$$

ou, matricialmente:

$$\dot{x}(t) = K_1 v(t) + K_2 w(t)$$

$$x(0) = x^0$$

ou ainda, combinando

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \text{---} \\ w(t) \end{bmatrix} = z(t)$$

$$(5) \quad \dot{x}(t) = K z(t) \quad \text{onde } K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

Fica claro que $z(t)$ é um fluxo de alocação.

Admitiremos, como Bellman, que êsse fluxo fica também limitado por questões tecnológicas.

De uma maneira geral:

$$G(x(t), z(t)) \leq 0$$

$$\text{Mas } (5) \Rightarrow x(t) = x^0 + \int_0^t K z(s) ds = x^0 + K \int_0^t z(s) ds.$$

$$\text{Então } G\left(x^0 + K \int_0^t z(s) ds, z(t)\right) \leq 0$$

$$\text{Chamando } \int_0^t z(s) ds = y(t).$$

$$R(y(t), z(t)) \triangleq G(x^0 + K y(t), z(t)) \leq 0 \quad (**)$$

Podendo perfeitamente se tratar de uma função não linear. Entretanto, para completar o nosso exemplo, vamos supor que as restrições tenham forma semelhante às da versão discreta ,

(**) O caso geral será visto no capítulo 4 .

Sendo B a matriz dos coeficientes do 1º membro das desigualdades de restrição, então:

$$(6) \quad z(t) \geq 0, \quad Bz(t) \leq x(t) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

O nosso problema seria então o de escolher

$z(t)$ $t \in [0, T_f]$ viável para o processo contínuo,

e que maximize:

$$b'x(T_f) \quad \text{onde} \quad b = (1, 0, 0, 0, 0, 0)'$$

Podemos contudo reformular o modelo da seguinte maneira:

$$x(t) = x^0 + \int_0^t Kz(s) ds$$

que levado em (6):

$$Bz(t) \leq x^0 + \int_0^t Kz(s) ds \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$z(t) \geq 0$$

também, maximizar $b'x(T_f)$ é equivalente a maximizar:

$$\int_0^{T_f} b'Kz(t) dt = \int_0^{T_f} a'z(t) dt$$

onde $b'K \triangleq a'$. Chamemos também $c \triangleq x^0$

Ficamos assim com o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \int_0^{T_f} a'z(t) dt \\ &\text{com} && Bz(t) \leq c + \int_0^t Kz(s) ds \quad t \in [0, T_f] \\ &&& z(t) \geq 0 \end{aligned}$$

PROBLEMA GERAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR CONTÍNUA:

A seguinte generalização é devida a Levinson [2] :

Achar uma função $z: [0, T_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de componentes z_i limitadas e Lebesgue-mensuráveis que

$$\text{maximize} \quad \int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) \, dt$$

$$\text{sujeita a} \quad B(t) z(t) \leq c(t) + \int_0^t K(t,s) z(s) \, ds, \quad z(t) \geq 0$$

(para quase todo $t \in [0, T_f]$)

onde $\forall t \in [0, T_f]$ $B(t)$ é uma matriz real $M \times N$, $a(t)$ um vetor de ordem n , $c(t)$ um vetor de ordem m e $\forall s \leq t$

$K(t,s)$ é uma matriz $m \times n$. Se $s > t$ $K(t,s) = [0]$ B, K, a e c são todas limitadas e Lebesgue-mensuráveis.

(7) LEMA:

Se $K = 0$, B for matriz constante, c e a vetores fixos, para toda solução ótima do problema existe um vetor de \mathbb{R}^n_+ que como função constante é viável e proporciona o mesmo valor que a solução ótima para o funcional objetivo.

prova: Seja $\bar{z}(t)$ solução ótima de:

$$\max \quad \int_0^{T_f} a \cdot z(t) \, dt.$$

com $B z(t) \leq c$, $z(t) \geq 0$, $z: [0, T_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de componentes z_i limitadas e Lebesgue-mensuráveis

seja $\bar{x} = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \bar{z}(t) \, dt$, $\bar{x}(t) = \bar{x}$ $\bar{x}(t)$ é viável pois

$$B \bar{x}(t) = B \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \bar{z}(t) \, dt = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} B \bar{z}(t) \, dt \leq \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} c \, dt = c$$

e $\bar{x}(t) \geq 0$
 também,

$$\int_0^{T_f} a' x(t) dt = \int_0^{T_f} a' \left(\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \bar{z}(t) dt \right) dt =$$

$$= a' \int_0^{T_f} \bar{z}(t) dt.$$

OBSERVAÇÃO:

Então, nas circunstâncias do Lema (7) o nosso problema se reduz a um de programação linear, pois se solucionarmos

$$\max a'x \quad x \in \Omega_p$$

$$\Omega_p = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid Bx \leq c, x \geq 0 \right\}$$

Obteremos também uma solução para o problema de programação linear contínua, fazendo

$$\bar{x}(t) = \bar{x}$$

APLICAÇÃO AO CONTRÔLE ÓTIMO:

É devido a Grinold [3] a seguinte aplicação ao Controle ótimo linear:

Seja $x(t)$ uma variável de estado m dimensional e $u(t)$ / um vetor de controle n dimensional.

Queremos maximizar uma forma linear:

$$(8) \quad \max \left[\int_0^{T_f} h(t) x(t) dt + \int_0^{T_f} g(t) u(t) dt + a'x(T_f) \right]$$

Sendo o sistema dinâmico dado por:

$$(9) \quad \dot{x}(t) = A(t) x(t) + H(t) u(t) + f(t), \quad x(0) = 0$$

e o sistema deve satisfazer as restrições:

$$(10) \quad B(t) u(t) \leq d(t) + D(t) x(t), \quad u(t) \geq 0$$

onde todas as funções que aparecem são limitadas e Lebesgue-mensuráveis, exceto $A(t)$ que deve ser contínua.

$$\text{Então, (9)} \Rightarrow x(t) = \int_0^t \Phi(t,s) \left[H(s) u(s) + f(s) \right] ds.$$

$$\text{onde } \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) ; \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

$$\text{ou ainda: } x(t) = \int_0^t Y(t) Y^{-1}(s) \left[H(s) u(s) + f(s) \right] ds.$$

$$\text{sendo } \dot{Y}(t) = A(t) Y(t).$$

$$x(t) = Y(t) \int_0^t Y(s)^{-1} \left[H(s) u(s) + f(s) \right] ds.$$

levando em (8) e (10) e observando que :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_f} h'(t) Y(t) \left[\int_0^t Y^{-1}(s) H(s) u(s) ds \right] dt &= \\ &= \int_0^{T_f} \left[\int_0^{T_f} h'(s) Y(s) ds \right] Y^{-1}(t) H(t) u(t) dt \end{aligned}$$

já, que chamando $Y^{-1}(s) H(s) u(s) = y(s)$ e $h'(t) Y(t) = v(t)$

e sendo w o degrau unitário:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_f} v(t) \int_0^t y(s) ds dt &= \int_0^{T_f} v(t) \int_0^{T_f} [w(s) - w(s-t)] y(s) ds dt = \\ &= \int_0^{T_f} \int_0^{T_f} v(t) \cdot [w(s) - w(s-t)] dt \cdot y(s) ds = \int_0^{T_f} \int_s^{T_f} v(t) dt \cdot y(s) ds, \end{aligned}$$

podemos transformar o problema de controle ótimo em um de programação linear contínua:

$$\text{maximizar} \quad \int_0^{T_f} \left[g'(t) + \left\{ \int_t^{T_f} h'(s) Y(s) ds \right\} Y^{-1}(t) H(t) + \right. \\ \left. + a' Y(T_f) \cdot Y(t)^{-1} \cdot H(t) \right] u(t) dt.$$

$$\text{sujeito a } u(t) \geq 0$$

$$B(t) u(t) \leq d(t) + D(t) \cdot Y(t) \left[\int_0^t Y(s)^{-1} \cdot \left[H(s) u(s) + f(s) \right] ds \right]$$

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR CONTÍNUA:

Sejam:

$$Q^n = \left\{ y \mid y : [0, T_f] \rightarrow \mathbb{R}^n, y \text{ contínua} \right\}$$

$$Q = \left\{ y \mid \hat{z}(t) + y(t) \in Z, y \in Q^n \right\}$$

onde

$$Z = \left\{ z \in Q^n \mid z(t) \geq 0, B z(t) \leq c(t) + \int_0^t K z(s) ds \right\}.$$

B, K matrizes reais constantes $n \times n$ e \hat{z} é uma solução ótima para o problema:

$$\max_{z \in Z} \int_0^{T_f} a(t)' z(t) dt \quad \text{com } a, c \in Q^n$$

LEMA:

\hat{z} solução ótima

$$\Rightarrow \int_0^{T_f} a(t) \cdot y(t) dt > 0 \quad \text{não tem solução } y(t) \text{ em } Q.$$

prova: vide apêndice.

TEOREMA: O sistema de inequações:

$$y \geq 0$$

$$B y(t) \leq \int_0^t K y(s) ds$$

$$\int_0^{T_f} a(t) \cdot y(t) dt > 0 \quad \text{não tem solução em } Q^n.$$

prova: vide apêndice.

TEOREMA: \hat{z} é uma solução ótima \Leftrightarrow

$$a(t) \cdot \hat{z}(t) \geq a(t) \cdot z(t) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$\forall z \in Z$$

prova: vide apêndice.

COROLÁRIO: Qualquer porção da solução ótima é ótima:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t) \cdot \hat{z}(t) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} a(t) \cdot z(t) dt.$$

$$\forall z \in Z, \forall t_1, t_2 \in [0, T_f], t_1 < t_2$$

2º CAPÍTULO

DUALIDADE

No capítulo anterior, definimos o problema geral de programação linear contínua:

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \quad \int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) \, dt \\ z \in Z \end{array}$$

onde

$$Z = \left\{ z \mid B(t) z(t) \leq c(t) + \int_0^t K(t,s) z(s) \, ds \quad \text{quase sempre,} \right. \\ \left. z(t) \geq 0 \quad \text{limitada e Lebesgue-mensurável} \right\}$$

Passaremos a chama-lo problema primal de programação linear contínua: (P) .

Podemos definir também um problema dual (D) , de programação linear contínua:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \int_0^{T_f} w(t) c(t) \, dt \\ w \in W \end{array}$$

onde:

$$W = \left\{ w \mid w(t) \cdot B(t) \geq a(t) + \int_t^{T_f} w(s) \cdot K(s,t) \, ds \quad \text{quase sempre,} \right. \\ \left. w(t) \geq 0 \quad \text{limitada e Lebesgue-mensurável} \right\}$$

Consideremos o problema de programação linear resultante quando tomamos $K = 0$, c e a vetores fixos para (P) :

$$(p) \quad \max_{x \in \Omega_p} a'x \quad \Omega_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq c, x \geq 0 \right\}$$

Analogamente para (D):

$$(d) \quad \min_{u \in \Omega_d} u'c \quad \Omega_d = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid u'B \geq a', u \geq 0 \right\}$$

Esses problemas assim definidos são duais, e é bem conhecido o seguinte teorema:

(11) TEOREMA: dados os problemas definidos acima:

$$\Omega_p \neq \emptyset \Rightarrow ((\exists \text{ solução de (p)}) \Leftrightarrow \Omega_d \neq \emptyset.)$$

$$\Omega_d \neq \emptyset \Rightarrow ((\exists \text{ solução de (d)}) \Leftrightarrow \Omega_p \neq \emptyset.)$$

Sejam x^* solução de (p) e u^* de (d):

então, $\forall x \in \Omega_p, \forall u \in \Omega_d$:

$$a'x \leq a'x^* = u'^*c \leq u'c.$$

O melhor teorema de dualidade para programação linear / contínua, seria uma generalização direta do teorema (11). Entretanto, tal não seria válido, e contraexemplos foram apresentados pela primeira vez por Tyndall [4].

RESULTADOS FRACOS (*): (Tyndall [4] , Levinson [2] , Grinold [3]).

(12) LEMA:

$$\int_0^{T_f} \left[w(t) \cdot \int_0^t K(t,s) z(s) ds \right] dt = \int_0^{T_f} \left[\left(\int_t^{T_f} w(s) \cdot K(s,t) ds \right) \cdot z(t) \right] dt.$$

prova: [3], pg 85.

(13) LEMA:

$$\inf \left\{ \int_0^{T_f} w(t) \cdot c(t) dt \mid w \in W \right\} \geq \sup \left\{ \int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) dt \mid z \in Z \right\}$$

prova: [5], pg 85.

(14) LEMA:

$$\int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) dt = \int_0^{T_f} w(t) \cdot c(t) dt, \quad z \in Z, \quad w \in W$$

\Rightarrow (i) e (ii) valem para quase todo $t \in [0, T_f]$:

$$(i) \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$B(t)_{i.} z(t) < c(t)_i + \int_0^t K(t,s)_{i.} z(s) ds \quad (**)$$

$$\Rightarrow w(t)_i = 0$$

$$(ii) \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(*) Assim denominamos porque somente descrevem propriedades de soluções ótimas para os problemas primal e dual.

(**) Se A é uma matriz, $A_{i.}$ é sua i-ésima linha e $A_{.j}$ sua j-ésima coluna.

$$w(t)'B(t) \cdot_j > a(t)_j + \int_t^{T_f} w(s)'K(s,t) \cdot_j ds$$

$$\Rightarrow z(t)_j = 0$$

prova: [3] , pg 86.

OBSERVAÇÃO: Tais soluções são ditas de equilíbrio.

OBSERVAÇÃO: É uma questão aberta ainda, se a desigualdade do Lema (13) pode ser transformada em igualdade.

UM TEOREMA DE DUALIDADE FORTE:

Foram demonstrados teoremas de dualidade forte, [4] , [2] com condições diferentes de regularidade de B, a, c e K. Entretanto, todos eles requerem as mesmas condições algébricas:

$$(15) \quad \left\{ z \mid B(t) z \leq 0, z \geq 0 \right\} = \{ 0 \} \quad \forall t$$

$$(16) \quad B(t) \geq 0, \quad K(t,s) \geq 0, \quad c(t) \geq 0 \quad \forall t,s$$

O teorema que apresentaremos aqui demonstrado por Grinold [3] , é uma generalização daqueles. Vamos entretanto inicialmente estabelecer algumas definições e lemas auxiliares:

DEFINIÇÃO:

$$\text{pos } [F] \triangleq \left\{ d \mid Fx = d, x \geq 0 \right\}$$

onde F é uma matriz m x n e pos [F] é o cone poliédrico gerado pelas colunas de F

OBSERVAÇÃO:

- (i) $\text{pos } [B(t) | I] = \left\{ d \mid B(t) z + I y = d ; z, y \geq 0 \right\}$
- (ii) $\text{pos } [F']$ é o cone gerado pelas linhas de F
- (iii) $\text{pos } [I] = \text{ortante não negativo}$
- (iv) $c \in \text{pos } [B' | I] \Leftrightarrow Bx \leq c, x \geq 0$ tem uma solução viável.

EXEMPLO: Podemos rescrever o teorema de dualidade para programação linear usando a definição acima:

"Se as condições:

$$a' \in \text{pos } [B' | -I]$$

$$c \in \text{pos } [B | I]$$

são satisfeitas, os problemas primal e dual de programação linear têm soluções ótimas x^* e u^* , com:

$$a' x^* = u^* c "$$

As condições garantem a viabilidade respectivamente dos problemas primal e dual.

Em programação linear contínua, a viabilidade é garantida pelas condições:

$$(17) \quad \left[a(t) + \int_t^{T_f} w(s) K(s, t) ds \right]' \in \text{pos } [B'(t) | -I]$$

$$(18) \quad \left[c(t) + \int_0^t K(t, s) z(s) ds \right] \in \text{pos } [B(t) | I]$$

quase sempre

LEMA:

As condições (17), (18) são garantidas respectivamente por

$$(19) \quad i) \quad a'(t) \in \text{pos} [B'(t) \mid -I]$$

$$ii) \quad \text{pos} [K'(s,t)] \subset \text{pos} [B'(t) \mid -I] \quad \forall s \geq t, \forall t$$

$$(20) \quad i) \quad c(t) \in \text{pos} [B(t) \mid I]$$

$$ii) \quad \text{pos} [K(t,s)] \subset \text{pos} [B(t) \mid I] \quad \forall s \leq t, \forall t$$

prova: [3], pg 86.

LEMA:

Se as condições (15) e (16) são satisfeitas, as condições (19) e (20) (consequentemente (17) e (18)) o são.

prova: [3], pg 88.

DEFINIÇÕES:

$$(i) \quad K(B,d) \triangleq \left\{ x \mid Bx \leq d, x \geq 0 \right\}$$

$$(ii) \quad J(B,h) \triangleq \left\{ u \mid u'B \geq h, u \geq 0 \right\}$$

$$(iii) \quad \bar{K}(B,d) \triangleq \text{a envoltória convexa dos pontos extremos de } K(B,d)$$

$$(iv) \quad \bar{J}(B,h) \triangleq \text{a envoltória convexa dos pontos extremos de } J(B,h)$$

(21) TEOREMA: (Dualidade forte):

Se as condições de limitação:

$$(22) \quad \exists \rho > 0 \Rightarrow \forall t \in [0, T_f] \text{ e } \forall d \in \mathbb{R}^m, \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$i) \quad x \in \bar{K}(B(t), d) \Rightarrow \|x\| \leq \rho \|d\|$$

$$ii) \quad u \in \bar{J}(B(t), h) \Rightarrow \|u\| \leq \rho \|h\|$$

E as condições de regularidade:

$$(23) \quad i) \text{ As funções } B(*)_{ij}, a(*)_j \text{ e } c(*)_i \text{ são con-} \\ \text{tínuas em quase todo } t \in [0, T_f], i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$ii) \text{ As funções } K(t, s)_{ij} \text{ são contínuas em quase todo} \\ (t, s) \in [0, T_f] \times [0, T_f], i = 1, 2, \dots, m; j = \\ t \geq s \quad \quad \quad = 1, 2, \dots, n$$

São satisfeitas, então as condições:

$$(24) \quad \forall t$$

$$i) \quad a'(t) \in \text{pos} [B'(t) \mid -I]$$

$$ii) \quad \text{pos} [K'(s, t)] \subseteq \text{pos} [B'(t) \mid -I] \quad \forall s \geq t$$

$$(25) \quad \forall t$$

$$i) \quad c(t) \in \text{pos} \left[B(t) \mid I \right]$$

$$ii) \quad \text{pos} \left[K(t,s) \right] \subseteq \text{pos} \left[B(t) \mid I \right] \quad \forall s \leq t$$

Implicam a existência de soluções de equilíbrio para os problemas primal e dual de programação linear contínua.

prova: [3], pg 89.

OBSERVAÇÃO: Se B e K forem matrizes constantes as condições (22) (e obviamente as (23)) são satisfeitas.

(26) OBSERVAÇÃO:

As condições (25) \Rightarrow \exists solução ótima para
(P)

As condições (24) \Rightarrow \exists solução ótima para
(D)

OBSERVAÇÃO: Há um teorema de dualidade forte demonstrado por Tyndal [5] onde as matrizes são constantes mas a e c são funções apenas limitadas e Lebesgue-mensuráveis, não sendo portanto englobado pelo Teorema (21). Entretanto, nêsse contexto a observação (26) não é verdadeira, sendo necessárias as condições / (24) e (25) tanto para garantir a existência de solução ótima para (P), como para (D).

OBSERVAÇÃO: A prova do Teorema (21) é feita discretizando os problemas primal e dual, transformando-os consequentemente em problemas de programação linear (P^N) e (D^N) . Usando o Teorema (11) obtemos soluções de equilíbrio para esses problemas. Como as condições (24) e (25) garantem a limitação dessas soluções, as soluções de equilíbrio de (P^N) e (D^N) convergirão / fracamente para soluções de equilíbrio de (P) e (D) , a medida que a discretização fique mais fina.

A discretização usada é a seguinte:

O intervalo $[0, T_f]$ é dividido em N intervalos de comprimento $\Delta_N = T/N$.

Para $k = 1, 2, \dots, N$ e $1 \leq k$:

$$(i) \quad a^{N,k} = a(k \Delta_N) \in \mathbb{R}^n$$

$$(ii) \quad c^{N,k} = c(k \Delta_N) \in \mathbb{R}^m$$

$$(iii) \quad B^{N,k} = B(k \Delta_N) \quad \text{uma matriz } m \times n$$

$$(iv) \quad K^{N,1,k} = K(1 \Delta_N, k \Delta_N) \quad \text{uma matriz } m \times n$$

Assim, :

$$\begin{aligned}
 (P^N) \quad & \text{Achar } z^{N,j} \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, N, \text{ que} \\
 & \text{maximize } \sum_{i=1}^N a^{N,i} z^{N,i} \\
 \text{com} \quad & B^{N,k} z^{N,k} \leq c^{N,k} + \sum_{j=1}^{k-1} K^{N,k,j} z^{N,j} \quad z^{N,j} \geq 0 \\
 & k = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D^N) \quad & \text{Achar } w^{N,i} \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ que} \\
 & \text{minimize } \sum_{i=1}^N w^{N,i} c^{N,i} \\
 \text{com} \quad & w^{N,k} B^{N,k} \geq a^{N,k} + \sum_{j=k+1}^N w^{N,j} K^{N,j,k} \quad w^{N,k} \geq 0 \\
 & k = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

Problemas êsses que como problemas de programação linear, são duais.

3º CAPÍTULO

RESOLUÇÃO

Trataremos agora da resolução de um problema de programação linear contínua. Serão vistas duas maneiras, uma algorítmica e outra utilizando equações diferenciais.

RESOLUÇÃO ALGORITÍMICA

O Teorema (21) do capítulo anterior nos sugere, quando as referidas condições forem satisfeitas, uma solução aproximada do problema, já que as soluções dos problemas discretos convergem fracamente às do problema linear contínuo, à medida que a discretização torna-se mais fina. Entretanto, como técnica, essa maneira apresenta vários inconvenientes: as soluções do problema discreto não são viáveis para o problema contínuo; não há nenhum critério de parada facilmente verificável; e finalmente, embora o problema geral de programação contínua tenha / ganho certa independência dos problemas dos quais se originou, a dificuldade da dimensionalidade, da qual com versões contínuas nós pretendíamos escapar, reaparecem, pois o número de restrições e variáveis de (P^N) aumenta quando a discretização se torna mais fina.

RESOLUÇÃO USANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:

(Larsen e Polak [6])

Vamos admitir que K é uma matriz constante, e B é uma matriz constante não singular tal que:

- (i) todos os elementos de B são não negativos
 ou (ii) todos os elementos de B^{-1} são não negativos

Também, redefinamos:

$$Z = \left\{ z \mid Bz(t) \leq c(t) + \int_0^t Kz(s) ds, z(t) \geq 0 \text{ para quase}$$

$$\text{todo } t \in [0, T_f] \quad \text{e} \quad z(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

funções limitadas e Lebesgue-mensuráveis }

$$W = \left\{ w \mid w'(t) B \geq a(t) + \int_t^{T_f} w(s)' K ds, w(t) \geq 0 \right.$$

$$\text{para } t \in [0, T_f] \quad \text{e} \quad w(t) = 0 \quad \text{para } t > T_f$$

funções limitadas e Lebesgue-mensuráveis }

$$(20) \quad \underline{\text{DEFINIÇÃO:}} \quad l(z_i) = 1 \quad \text{se } z_i > 0$$

$$l(z_i) = 0 \quad \text{se } z_i \leq 0$$

Também, reescrevamos:

(P) Achar um $z^* \in Z$ tal que

$$\int_0^{T_f} a(t)' z^*(t) dt = \max_{z \in Z} \int_0^{T_f} a(t)' z(t) dt$$

(D) Achar um $w^* \in W$ tal que

$$\int_0^{T_f} w^*(t)' c(t) dt = \min_{w \in W} \int_0^{T_f} w(t)' c(t) dt$$

(21) DEFINIÇÃO: Seja K_p o conjunto de pares (x, u) de funções $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

(22) u é mensurável e x é absolutamente contínua (*)

(23) $u(t) \geq 0$, $B^{-1} [-u(t) + c(t) + Kx(t)] \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$

(24) $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = B^{-1} [-u(t) + c(t) + Kx(t)] \quad \forall t \in [0, T_f]$$

(25)

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

A equação (25) é obtida introduzindo-se em Z a mudan-

ça de variáveis $x(t) = \int_0^t z(s) ds$

(*) u pode ser considerada uma variável de folga.

Também, (25) \Rightarrow a segunda parte de (23) é equivalente a

$$\dot{x}(t) \geq 0 \quad \text{para} \quad t \in [0, T_f] \quad \text{completando as condições}$$

de Z.

Os pares (x, u) que forem elementos de K_p serão chamados/
soluções viáveis para o problema primal.

Em termos de (21), podemos reescrever o problema primal:

(P') Seja J_p definido por: $\forall (x, u) \in K_p$

$$(26) \quad J_p(x, u) = \int_0^{T_f} a(t)' B^{-1} \left[-u(t) + c(t) + Kx(t) \right] dt$$

Achar um par $(x^*, u^*) \in K_p$ tal que $J_p(x^*, u^*) =$

$$= \max J_p(x, u)$$

$$(x, u) \in K_p$$

É facilmente verificado que (26) define o mesmo funcional do problema original (P) quando levamos (22), (23), (24), (25) em consideração. Qualquer par $(x, u) \in K_p$ que maximize J_p será referido como uma solução ótima para o problema primal.

(27) DEFINIÇÃO: Seja K_d o conjunto de pares (y, v) de funções $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que ,

(28) v é mensurável e y é absolutamente contínua (*)

(*) v pode ser considerada uma variável de folga.

$$(29) \quad v(t) \geq 0, \quad [v(t) + a(t) - y(t)'K]'B^{-1} \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$(30) \quad y(T_f) = 0$$

$$(31) \quad \dot{y}(t) = [v(t) + a(t) - y(t)'K]'B^{-1} \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$\dot{y}(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

A equação (31) é obtida introduzindo-se em W a mudança de

variáveis $y(t) = - \int_t^{T_f} w(s) ds.$

Também, (31) \Rightarrow a segunda parte de (29) é equivalente a $\dot{y}(t) \geq 0$ para $t \in [0, T_f]$ completando as condições de W.

Os pares (y, v) que forem elementos de K_d serão chamados soluções viáveis para o problema dual.

Em termos de (27), podemos reescrever o problema dual:

(D') Seja J_d definido por:

$$(32) \quad J_d(y, v) = \int_0^{T_f} [v(t) + a(t) - y(t)'K]'B^{-1}c(t) dt$$

Achar um par $(y^*, v^*) \in K_d$ tal que $J_d(y^*, v^*) = \min J_d(y, v)$

$$(y, v) \in K_d$$

É facilmente verificado que (32) define o mesmo funcional do problema original(D) quando levamos (28), (29), (30), (31)/ em consideração. Qualquer par $(y,v) \in K_d$ que minimize J_d será referido como uma solução ótima para o problema dual.

1º PARTE : Método primal

Nós consideraremos o problema primal (P') e, por meio de funções multiplicadoras, obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução ótima (x,u) . Então, admitindo/ que existe uma solução ótima para o problema primal (P') , obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução para o problema dual (D').

(33) DEFINIÇÃO: Sendo $\lambda(t), \xi(t) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(t) = \text{diag}(1(a(t) - \lambda(t) B_i^{-1})) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

(34)

$$\Lambda(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

$$\Delta(t) = \text{diag}(1(a_i(t) - \xi_i(t))) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

(35)

$$\Delta(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

matrizes diagonais $n \times n$

TEOREMA: Se a função a é contínua por partes em $[0, T_f]$, as equações:

$$(36) \quad \dot{\lambda}(t) = - \left\{ [\lambda(t) - a(t)] \cdot B^{-1} \Lambda(t) K \right\}, \quad \lambda(T_f) = 0$$

$$(37) \quad \dot{\delta}(t) = - \left\{ [\delta(t) - a(t)] \cdot \Delta(t) B^{-1} K \right\}, \quad \delta(T_f) = 0$$

têm solução absolutamente contínua única definida em todo $[0, T_f]$, que usaremos como funções multiplícadoras.

prova: [6], pg 9.

TEOREMA: Se as equações (36) e (37) têm soluções λ e δ , as equações:

$$(38) \quad \dot{x}(t) = B^{-1} \Lambda(t) [c(t) + Kx(t)], \quad x(0) = 0$$

$$(39) \quad \dot{x}(t) = \Delta(t) B^{-1} [c(t) + Kx(t)], \quad x(0) = 0$$

que aquelas soluções definem por intermédio de Λ e Δ , têm soluções únicas que serão denotadas respectivamente por x_λ e x_δ

prova: [6], pg 9.

DEFINIÇÃO: Se (36) e (37) têm solução, estas, por intermédio de Λ e Δ definem:

$$(40) \quad \Lambda_1 = I - \Lambda$$

onde I é a matriz identidade

$$(41) \quad \Delta_1 = I - \Delta$$

DEFINIÇÃO: Sejam x_λ e x_δ as soluções de (38) e (39) relacionadas com as mesmas matrizes Λ e Δ que aparecem na definição (33).

Então definamos:

$$(42) \quad u_\lambda(t) = \Lambda_1(t) [c(t) + Kx(t)] \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$u_\lambda(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

$$(43) \quad u_\delta(t) = B \Delta_1(t) B^{-1} [c(t) + Kx(t)] \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$u_\delta(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

É visto facilmente que se:

$$\dot{x}_\lambda(t) \geq 0, \quad u_\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$\dot{x}_\delta(t) \geq 0, \quad u_\delta(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

então (x_λ, u_λ) e (x_δ, u_δ) são soluções viáveis para o problema primal.

- (44) TEOREMA: Se a função multiplicadora λ determinada por (36) existir, se (x_λ, u_λ) determinado/por ela por intermédio de (38) e (42) é viável e se todos os elementos da matriz B são não negativos, então (x_λ, u_λ) é uma solução ótima / para o problema primal.

prova: [6], pg 13.

- (45) TEOREMA: Se a função multiplicadora ξ determinada por (37) existir, se (x_ξ, u_ξ) determinado/por ela por intermédio de (39) e (43) é viável e se todos os elementos da matriz B^{-1} são não/negativos, então (x_ξ, u_ξ) é uma solução ótima para o problema primal.

prova: [6], pg 15.

TEOREMA: Suponhamos que a função multiplicadora definida por (36) exista e que ela defina uma solução ótima / (x_λ, u_λ) para o problema primal.

Seja (y_λ, v_λ) determinado por λ como soluções das equações:

$$\begin{aligned} \dot{y}_\lambda(t) &= [a(t) - y_\lambda(t)' K] \lambda(t) B^{-1} \quad \forall t \in [0, T_f] \\ \dot{y}_\lambda(t) &= 0 \quad \forall t \notin [0, T_f] \end{aligned}$$

$$(47) \quad v_{\lambda}(t) = - [a(t) - y(t)' K] \Delta_1(t) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$v_{\lambda}(t) = 0$$

Se $(y_{\lambda}, v_{\lambda})$ satisfaz:

$$\dot{y}_{\lambda}(t) \geq 0, \quad v_{\lambda}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

e a matriz B^{-1} comuta com $\Delta(t)$ então $(y_{\lambda}, v_{\lambda})$ é uma solução ótima para o problema dual.

prova: [6], pg 15.

TEOREMA: Suponhamos que a função multiplicadora definida por (37) exista e que ela defina uma solução ótima/ (x_{δ}, u_{δ}) para o problema primal.

Seja (y_{δ}, v_{δ}) determinado por δ como soluções das equações:

$$(48) \quad \dot{y}_{\delta}(t) = [a(t) - y(t)' K] B^{-1} \Delta(t), \quad y_{\delta}(T_f) = 0$$

$$(49) \quad v_{\delta}(t) = - [a(t) - y(t)' K] B^{-1} \Delta_1(t) B$$

Se (y_{δ}, v_{δ}) satisfaz:

$$\dot{y}_{\delta}(t) \geq 0, \quad v_{\delta} \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

e a matriz B^{-1} comuta com $\Delta(t)$ então (y_δ, v_δ) é uma solução ótima para o problema dual.

prova: [6], pg 17.

2° PARTE : Método dual

Faremos agora o oposto que no método primal. Por meio de funções multiplicadoras obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução ótima (y, v) para o problema dual (D') . Então, admitindo que existe uma solução ótima para este problema, obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução para o problema primal (P') .

TEOREMA: Se a função a é contínua por partes em $[0, T_f]$ então as equações:

$$(50) \quad \dot{y}_\mu(t) = [a(t) - y_\mu(t)' K] M(t) B^{-1}, \quad y_\mu(T_f) = 0$$

$$(51) \quad \dot{y}_\nu(t) = [a(t) - y_\nu(t)' K] B^{-1} N(t), \quad y_\nu(T_f) = 0$$

onde

$$(52) \quad \begin{aligned} M(t) &= \text{diag } 1(a_i(t) - y_\mu(t)' K_i) \quad \forall t \in [0, T_f] \\ M(t) &= 0 \quad t \notin [0, T_f] \end{aligned}$$

$$(53) \quad N(t) = \text{diag } 1((a(t) - y_{\nu}(t)'K) B_i^{-1}) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$N(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_f]$$

têm soluções absolutamente contínuas únicas:

prova: [6], pg 21.

(54) DEFINIÇÃO: Sejam y_{μ} e y_{ν} soluções de (50), (51).
Então, definamos:

$$(55) \quad v_{\mu}(t) = - [a(t) - y_{\mu}(t)'K] M_1(t)$$

$$(56) \quad v_{\nu}(t) = - [a(t) - y_{\nu}(t)'K] B^{-1} N_1(t) B$$

$$\text{onde} \quad M_1 = I - M$$

$$N_1 = I - N$$

É visto facilmente que se:

$$\dot{y}_{\mu} \geq 0, \quad v_{\mu} \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$\dot{y}_{\nu} \geq 0, \quad v_{\nu} \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

então (y_{μ}, v_{μ}) e (y_{ν}, v_{ν}) são soluções viáveis para o problema dual.

TEOREMA: Se as equações (50) e (51) têm soluções y_ρ , y_v ,
as equações:

$$(57) \quad \dot{\rho}(t) = K M(t) B^{-1} [\rho(t) - c(t)] \quad \rho(0) = 0$$

$$(58) \quad \dot{v}(t) = K B^{-1} N(t) [v(t) - c(t)] \quad v(0) = 0$$

têm soluções únicas.

prova: [6] , pg 22.

TEOREMA: Se o par (y_ρ, v_ρ) determinado por (50) e (55) e
existe e é viável, se todos os elementos da matriz B
são não negativos e a função multiplicadora ρ deter -
minada por (57) satisfaz:

$$(59) \quad B^{-1} [-\rho(t) + c(t)] \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

então (y_ρ, v_ρ) é uma solução ótima para o problema /
dual.

prova: [6] , pg 23.

TEOREMA: Se o par (y_v, v_v) determinado por (51) e (56)
existe e é viável, se todos os elementos da matriz B^{-1}
são não negativos e se a função multiplicadora v de
terminada por (58) satisfaz:

$$c(t) - \gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

então (y_γ, v_γ) é uma solução ótima para o problema dual.

prova: [6], pg 24.

TEOREMA: Suponhamos que a função ρ definida por (57) exista e que o par (y_ρ, v_ρ) relacionado com ela e determinado por (50) e (55) seja ótimo. Então, se (x_ρ, u_ρ) que são definidos por:

$$\dot{x}_\rho(t) = B^{-1} M(t) [c(t) + K x_\rho(t)], \quad x_\rho(0) = 0$$

$$u_\rho(t) = M_1(t) [c(t) + K x_\rho(t)]$$

satisfaz:

$$\dot{x}_\rho(t) \geq 0, \quad u_\rho(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

e as matrizes B^{-1} e $M(t)$ comutam, é uma solução ótima para o problema primal.

prova: [6], pg 25.

TEOREMA: Suponhamos que a função γ definida por (58) exista e que o par (y_γ, v_γ) relacionado com ela e determinado por (51), (56) seja ótimo. Então, se (x_γ, u_γ) que são definidos por:

$$\dot{x}_y(t) = N(t) B^{-1} [c(t) + K x_y(t)], \quad x_y(0) = 0$$

$$u_y(t) = B N(t) B^{-1} [c(t) + K x_y(t)]$$

satisfaz:

$$\dot{x}_y(t) \geq 0, \quad u_y(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

e as matrizes B^{-1} e $N(t)$ comutam, é uma solução ótima para o problema primal.

prova: [6], pg 25.

OBSERVAÇÃO: Não há nenhuma dificuldade computacional fora do comum envolvida com o cálculo das soluções das equações diferenciais que apareceram acima. Poderíamos por exemplo na aplicação do Teorema (44), integrar primeiramente a equação (36) de trás para diante no tempo para obter λ . Calculariamos então λ por (34) correspondente a λ e integrariamos finalmente a equação (38). Se a solução da equação (38) juntamente com u_λ dado pela expressão (42) formar um par que é uma solução viável, então será também uma solução ótima para o problema primal. Podemos / proceder análogamente na aplicação dos outros teoremas.

4º CAPÍTULO

PROGRAMAÇÃO CONTÍNUA COM RESTRIÇÕES

NÃO LINEARES - UM TEOREMA DE "TURNPIKE"

PARA PROCESSOS CONTÍNUOS.

Podemos considerar que um problema de programação contínua consiste em determinar um processo contínuo, que satisfazendo certas restrições, maximize um funcional objetivo, entre todos os processos contínuos que satisfaçam as referidas/ restrições.

Assim, no primeiro capítulo, retirando a hipótese de linearidade das restrições, tínhamos que determinar:

$$\max \int_0^{T_f} a' z(t) dt$$

com $R(y(t), z(t)) \leq 0$ para quase

todo t

onde

$$y(t) = \int_0^t z(s) ds \quad \text{e } z \text{ é limitada}$$

$$\forall t \in [0, T_f] \quad \text{e Lebesgue-mensurável.}$$

Isto, por conveniência, considerando-se y uma função absolutamente contínua, pode ser reescrito:

Determinar:

$$\max a^* y(T_f)$$

com $(y(t), z(t) = \dot{y}(t)) \in T$ quase $\forall t \in [0, T_f]$

onde
$$T = \left\{ (y, z) \mid R(y, z) \leq 0 ; y, z \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

OBSERVAÇÃO: No caso de programação linear contínua:

$$T = \left\{ (y, z) \mid Bz \leq Ky ; y, z \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

Para processos discretos, existem Teoremas ditos de "Turnpike" ([7], [8], [9]), que nos dão informações valiosas para a determinação de processos viáveis ótimos.

Nêste capítulo, demonstraremos um Teorema de "Turnpike" para processos contínuos, aplicável a problemas de programação / contínua não lineares.

DEFINIÇÃO: Um conjunto T de pares de vetores de \mathbb{R}^n , satisfazendo as condições abaixo, será chamado um conjunto / transformação.

(60) T é um cone convexo fechado no ortante não negativo de \mathbb{R}^{2n} .

(61) $(0, z) \in T \Rightarrow z = 0$

Para a obtenção dos resultados a seguir será necessário adicionar as seguintes hipóteses:

$$(62) \quad (y, z) \in T, \quad \tilde{y} \geq y \text{ e } 0 \leq \tilde{z} \leq z \Rightarrow (\tilde{y}, \tilde{z}) \in T$$

$$(63) \quad \exists (y^0, z^0) \in T \quad \text{e} \quad z^0 > 0$$

$$(64) \quad \text{Se } (y, z), (u, v) \in T \text{ e } y \text{ e } u \text{ são linearmente independentes, então, } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}, \alpha + \beta = 1$$

$$\exists w \text{ tal que } (\alpha y + \beta u, w) \in T \text{ e } \alpha z + \beta v < w$$

(nem sempre precisaremos de todas condições)

LEMA: Se T satisfaz também (62) e (63), então

$$(65) \quad \exists y^* \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$p^* \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$\lambda^* \in \mathbb{R}_{++}$$

tais que

$$(y^*, \lambda^* y^*) \in T$$

$$p^* \cdot (z - \lambda^* y) \leq 0 \quad \forall (y, z) \in T$$

prova: [10] , pags 338, 339.

LEMA: Se T satisfaz (64) y^*, p^*, λ^* referidos no lema anterior satisfazem:

$$(66) \quad p^* \cdot (z - \lambda^* y) < 0 \quad \forall (y, z) \in T \text{ exceto se}$$

$$y = \beta y^* \text{ para algum } \beta \in \mathbb{R}_{++}$$

$$(67) \quad y^* \text{ é único a menos de um fator de escala.}$$

prova: [7] , pags 203, 206.

DEFINIÇÃO: O conjunto $\{ y(t) \mid 0 \leq t \leq T_h \}$ (abreviadamente:

$\{ y(t) \}_0^{T_f}$) onde $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ é absolutamente

mente contínua, será denominado um processo viável

de horizonte finito $T_h \leq T_f$, T_f finito, se:

$$(y(t), \dot{y}(t)) \in T \quad \forall t \in [0, T_h]$$

LEMA: Se $\exists k \in \mathbb{R}_{++} \nrightarrow \forall$ processo viável

$\{ y(t) \}_0^{T_f}$, $T_f \geq k$, com $y(T_f) \geq 0$, acontecer de

$$\exists t_i \geq$$

$$y_i(t_i) > 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t_i < T_f$$

(e assim, segundo Nikaido [7], pg 204, o conjunto transformação é dito indecomponível)

então $y^* > 0$

prova: $\left\{ e^{\lambda^* t} y^* \right\}_0^{T_f} \quad \forall T_f \in \mathbb{R}_{++}$ é um processo viável -

vel com $e^{\lambda^* T_f} y^* \geq 0$. E se $y_i^* = 0$ para algum i ,

esse processo viável para $T_f > k$ satisfaria $e^{\lambda^* t_i} y_i^* = 0$

($0 \leq t_i < T_f$) contrariando a nossa hipótese. ■

LEMA: $y^* > 0 \Rightarrow p^* > 0$

prova: [7], pag 209.

LEMA: Se T satisfaz (62) e $y^* > 0$, a seguinte condição é

satisfeita:

(68) Dado um vetor inicial $y^0 > 0$, para algum $G \in \mathbb{R}_{++}$ e

algum $T_0 \in \mathbb{R}_{++}$, \exists um processo viável $\left\{ r(t) \right\}_0^{T_0} \geq c_0$

meçando em $r(0) = y^0$ e terminando em $r(T_0) = \zeta y^*$ com

$$\dot{r}(T_0) = \lambda^* \zeta y^*$$

prova: Seja a equação:

$$\dot{r}(t) = 0 \cdot r(t) + z(t) \quad \text{e as condições:}$$

(69)

$$r(0) = y^0, \quad \dot{r}(T_0) = z(T_0) = \zeta \lambda^* y^*, \quad r(T_0) = \zeta y^*$$

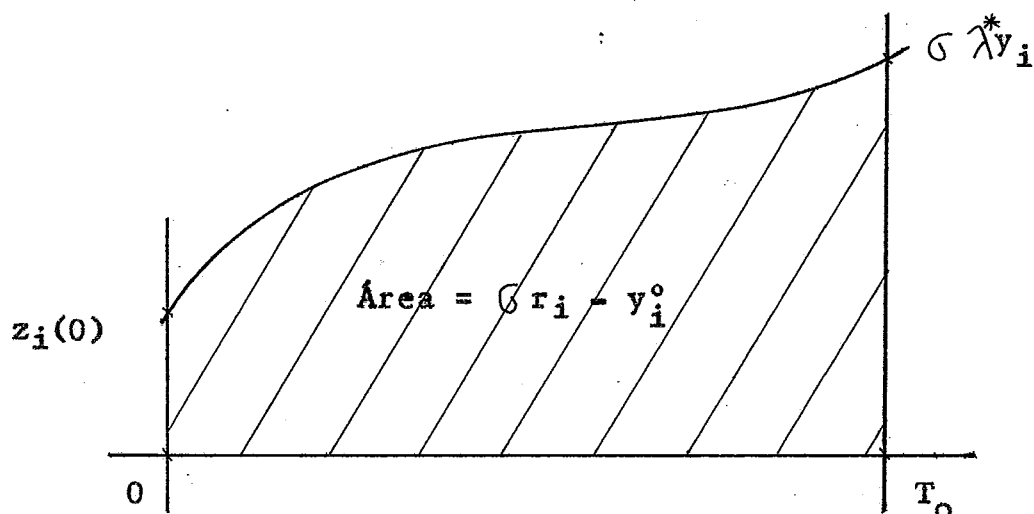
Integrando (69):

$$\zeta y^* - y^0 = \int_0^{T_0} z(t) dt$$

Como, para viabilidade, z tem que ser não negativa, temos a condição a ser satisfeita:

$$(70) \quad \zeta y^* \geq y^0$$

Evidentemente, até este ponto, podemos garantir a existência de soluções de (69) satisfazendo a condição adicional (70), pois para cada componente, fixos ζ e T_0 :



é suficiente que tomemos para $z_i(t)$ uma função tal que

$$\int_0^{T_0} z_i(t) dt = \sigma y_i^* - y_i^0 \quad i = 1, \dots, n, \text{ valor êsse fi}$$

xo e bem determinado para cada i .

Entretanto, para o processo

$$\left\{ r(t) = y^0 + \int_0^t z(\tau) d\tau \right\}_0^{T_0} \text{ ser viável, ainda temos que}$$

$$\text{ter:} \quad (r(t), z(t)) \in T \quad \forall t \in [0, T_0]$$

Agora, uma condição suficiente para isso é que:

$$(71) \quad z(t) \leq \delta \lambda^* e^{\lambda^* t} \quad y^* \triangleq \bar{z}(t) \quad \text{para}$$

algum

$$(72) \quad r(t) \geq \delta \cdot e^{\lambda^* t} \quad y^* \triangleq \underline{r}(t) \quad \delta \in \mathbb{R}_{++}$$

pois estamos admitindo (62) e o processo $\left\{ \delta e^{\lambda^* t} y^* \right\}_0^t$ é

71.
viável $\forall t \in \mathbb{R}_{++}$

Mas para que as condições (71) e (72) possam ser satisfeitas por soluções de (69) com a condição (70), é preciso que:

$$\bar{z}(T_0) = \delta \lambda^* e^{\lambda^* T_0} y^* \geq \delta \lambda^* y = z(T_0) \quad \text{ou seja:}$$

$$e^{\lambda^* T_0} \geq \frac{\delta}{\delta} \quad \text{ou ainda:}$$

$$(73) \quad \log \delta - \log \delta \leq \lambda^* T_0$$

Também, já que

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^t z(\zeta) d\zeta + y^0 = \int_0^{T_0} z(\zeta) d\zeta - \int_t^{T_0} z(\zeta) d\zeta + y^0 = \\ &= \delta y^* - \int_t^{T_0} z(\zeta) d\zeta \geq \delta y^* - \int_t^{T_0} \bar{z}(\zeta) d\zeta = \\ &= \delta y^* - \delta e^{\lambda^* T_0} y^* + \delta e^{\lambda^* t} y^* \end{aligned}$$

Vamos impor que:

$$r(t) \geq \delta y^* - \delta e^{\lambda^* T_0} y^* + \delta e^{\lambda^* t} y^* \xrightarrow{\downarrow} \underline{r}(t) = \delta e^{\lambda^* t} y^*$$

$$\forall t \in [0, T_0]$$

ou seja: $\zeta \geq e^{\lambda^* T_0}$

ou ainda:

$$(74) \quad \log \zeta - \log \delta \geq \lambda^* T_0$$

E, finalmente, é preciso que:

$$r(0) = y^0 \gg \underline{r}(0) = \delta y^*$$

ou seja:

$$\delta y^* \leq y^0$$

Reunindo então as condições (73) e (74) em uma só, temos as seguintes condições a ser satisfeitas por ζ , δ e T_0 , para que existam soluções de (69) viáveis:

$$(75) \left\{ \begin{array}{l} \zeta y^* \geq y^0 \\ \delta y \leq y^0 \\ T_0 = \frac{1}{\lambda^*} (\log \zeta - \log \delta) > 0 \end{array} \right.$$

Realmente, essas condições são suficientes para que soluções de (69) possam satisfazer (71) e (72) e portanto serem viáveis.

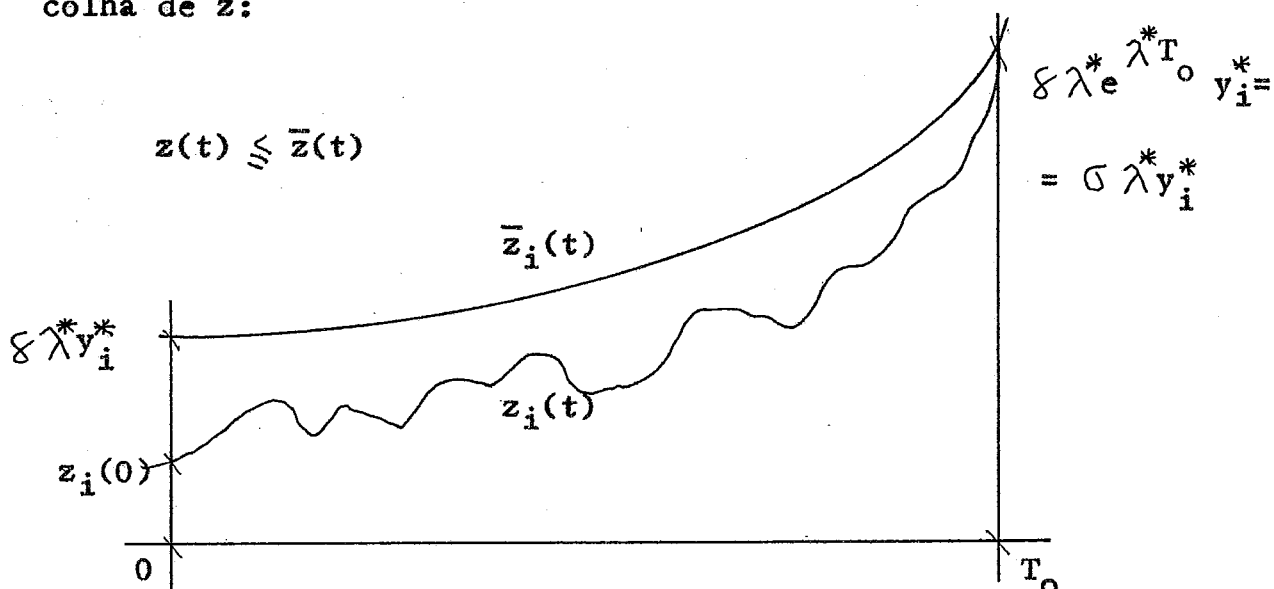
Ora, as condições (75) são sempre possíveis de serem satisfeitas, escolhendo ζ suficientemente.

grande e δ suficientemente pequeno.

Então, a condição $(r(t), z(t)) \in T, \forall t \in [0, T_0]$

que o processo $\{r(t)\}_0^{T_0}$ deve satisfazer, introduz, escolhi

dos já δ , σ e T_0 apropriados, a seguinte limitação à nossa escolha de z :



E ainda, como $\int_0^{T_0} z_i(t) dt = \sigma y_i^* - y_i^0$

e $\int_0^{T_0} \bar{z}_i(t) dt = \underline{r}(T_0) - \underline{r}(0) \geq \delta e^{\lambda^* T_0} y^* - \underline{r}(0)$

que, pelas condições (75) e (73) é $\geq \sigma y^* - y^0$,

uma função vetorial cujas componentes sejam exponenciais passando por $\sigma \lambda^* y_i$ e tendo para integral entre 0 e T_0 os valo-

res $\{y_i - y_i^0\}$ é uma solução viável de (69). ■

DEFINIÇÃO: Seja U uma coleção de funções $u: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$

tais que $u(\alpha y) = \alpha u(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$

Um processo viável $\{y(t)\}_0^{T_f}$ começando em /

$y(0) = y^0$ é dito U -ótimo se:

$$\exists u \in U \rightarrow$$

$$u(y(T_f)) = \max \{ u(x(T_f)) \mid$$

$$\{x(t)\}_0^{T_f} \text{ viável}, \quad x(0) = y^0 \}$$

LEMA: Se $U = \{u_a \mid u_a(y) = a'y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, a \in P_n\}$

onde P_n é o simplex padrão de \mathbb{R}^n , (*) é satisfeita a seguinte condição:

(76) Para algum $\hat{u} \in \mathbb{R}_{++}$ e algum $T_1 \in \mathbb{R}_+$, \exists um proces

so viável $\{w(t)\}_0^{T_1}$ começando em $w(0) = y^*$ e terminando /

$$(*) \quad P_n = \left\{ q \in \mathbb{R}_+^n \mid \|q\| = 1 \right\}$$

$$\text{em } w(T_1) = q \rightarrow u(q) \geq \hat{u} \quad \forall u \in U$$

prova: basta tomar $\hat{u} = \min a^* q$ ■

$$a \in P_n$$

LEMA: Se U é o do lema anterior e $p^* > 0$, temos também:

(77) As funções $\in U$ são majoradas uniformemente por $p^* \cdot y$

no sentido de que existe um $C \in \mathbb{R}_{++} \rightarrow u(y) \leq C p^* \cdot y$

$$\forall u \in U \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}_+^n$$

prova: Façamos $C = \max (1 / p_i^*)$

$$a_i \leq 1 \leq C p_i^* \quad i = 1, \dots, n \quad \forall a \in P_n$$

$$\Rightarrow u_a(y) = a \cdot y \leq C p^* \cdot y \quad \forall u_a \in U, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^n \quad \blacksquare$$

(78) LEMA: Se T satisfaz (62), o conjunto

$$\Lambda = \{ (y, z) \mid y \in P_n \text{ e } \exists \text{ um processo viável}$$

$$\{ y(t) \}_0^{T_f} \rightarrow \text{para algum } t \in [0, T_f], y(t) = y \text{ e}$$

$$\dot{y}(t) = z \}$$

é compacto.

prova: é limitado pois supondo por absurdo que não, seja

$t_0 \in [0, T_f] \rightarrow$ o conjunto dos vetores $z(t_0) \rightarrow$] um processo via

vel $\left\{ y(t) \right\}_0^{T_f}$ com $y(t) \in P_n$ e $\dot{y}(t_0) = z(t_0)$ não é limitado.

Seja $\left\{ y^i(t) \right\}_0^{T_f}$ uma sequência de tais processos com

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \| z^i(t_0) \| = \infty$$

$i \rightarrow \infty$

observando que $(y^i(t_0), z^i(t_0)) \in T$ e, em vista de T ser um cone, temos:

$$\left(\frac{y^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|}, \frac{z^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|} \right) \in T \quad i = 1, 2, \dots$$

Como $y^i(t_0)$ é limitado por hipótese,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{y^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|} = 0 \quad \text{mas} \quad \frac{z^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|} \text{ tem norma uni}$$

tária, então sem perda de generalidade, pode ser admitido que:

$$\frac{z^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|} \rightarrow \hat{z} \quad \text{com} \quad \| \hat{z} \| = 1$$

$$\text{então,} \quad \left(\frac{y^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|}, \frac{z^i(t_0)}{\| z^i(t_0) \|} \right) \rightarrow (0, \hat{z}) \in T \quad \text{pois } T$$

é fechado.

Logo (61) $\implies \hat{z} = 0$, absurdo pois $\|\hat{z}\| = 1$

Vamos agora mostrar que \mathcal{L} é fechado. Seja uma sequência

$(y_i, z_i) \in \mathcal{L}$ convergindo para (\hat{y}, \hat{z}) .

Então $(\hat{y}, \hat{z}) \in T$, pois T é fechado.

$$\text{Mas } (y_i, z_i) \longrightarrow (\hat{y}, \hat{z}) \iff \begin{cases} y_i \longrightarrow \hat{y} \\ z_i \longrightarrow \hat{z} \end{cases}$$

já que P_n é fechado, $\hat{y} \in P_n$.

Por (62), podemos construir um processo viável:

$$\left\{ y(t) = \hat{y} + t\hat{z} \right\}_0^{T_f} \quad \text{com} \quad \frac{d}{dt} (\hat{y} + t\hat{z}) = \hat{z}$$

Como $\hat{y} = y(0) \in \left\{ \hat{y} + t\hat{z} \right\}_0^{T_f}$, $(\hat{y}, \hat{z}) \in \mathcal{L}$ e \mathcal{L} é fechado.

Mas \mathcal{L} é um subconjunto limitado e fechado de \mathbb{R}^{2n} , logo é compacto. ■

(79) LEMA: Dado um conjunto transformação T , admitindo (65), (66) e (68) satisfeitas, e, sem perda de generalidade, que $\|y^*\| = 1$,

Temos:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}, \exists \rho \in \mathbb{R} \text{ tal que :}$$

$$(80) \quad \lambda^* > \rho > 0$$

$$(81) \quad \| (y / \|y\|) - y^* \| \geq \varepsilon, \quad y = y(t_0) \in \left\{ y(t) \right\}_0^{T_f}$$

$$\text{processo viável, } \dot{y}(t_0) = z \implies p^*(z - \rho y) \leq 0$$

prova: Como T é um cone, só precisamos provar para proces-

$$\text{sos } (y, z) \ni \|y\| = 1$$

$$\text{Consideremos: } V = \left\{ (y, z) \mid y = y(t_0) \in \left\{ y(t) \right\}_0^{T_f} \text{ proces-} \right.$$

$$\left. \text{so viável, } \dot{y}(t_0) = z, \|y\| = 1, \|y - y^*\| \geq \varepsilon \right\}$$

Se $V = \emptyset$, qualquer $\rho \in \mathbb{R}_{++}$ satisfazendo (80) satisfará também (81).

Se $V \neq \emptyset$ reescrevamo-lo:

$$V = \bigcap \left\{ (y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^{2n}, \|y - y^*\| \geq \varepsilon \right\}$$

$$\text{Como } \left\{ (y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^{2n}, \|y - y^*\| \geq \varepsilon \right\} \text{ é fechado}$$

em \mathbb{R}^{2n} e \bigcap é compacto, V é compacto.

Mas $(y, z) \in V \implies y \neq 0$ e y não é proporcional a y^*

$$p^* \cdot z < \lambda^* p \cdot y \text{ por (66)}$$

Então, $p^* \cdot y > 0$. Definamos:

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(y, z) = \frac{p^* \cdot z}{p^* \cdot y} \quad f \text{ é contínua em } V, \text{ e co}$$

mo V é compacto, f tem um máximo \bar{c} em V que por (66) é menor que λ^* .

Então, qualquer $\rho \rightarrow \bar{c} \leq \rho < \lambda^*$ satisfaz (80) e (81) ■

TEOREMA: Dado um conjunto transformação T e admitindo satisfeitas (65), (66), (68), (76) e (77), temos que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++} \exists k \in \mathbb{R}_{++} \rightarrow$$

todos os processos u -ótimos, $\{y(t)\}_0^{T_f}$, $T_f \geq k$, T_f finito não fixo, começando em $y(0) = y^0 > 0$ satisfazem:

$$\left\| \frac{y(t)}{\|y(t)\|} - y^* \right\| < \varepsilon \text{ exceto possivelmente durante um tempo máximo } k. \text{ (estamos considerando, como no lema (79) que } \|y^*\| = 1)$$

prova: Seja L o conjunto dos $t \in [0, T_f] \rightarrow \left\| \frac{y(t)}{\|y(t)\|} - y^* \right\| \geq \varepsilon$ vale para um processo viável $\{y(t)\}_0^{T_f}$ começando em y^0 .

Como y e $\|\cdot\|$ são aplicações contínuas, L é mensurável. Se

ja então 1 a sua medida. L' como também 1 dependem do processo em questão. O teorema será então provado se 1 é limitada uniformemente para todos os processos U-ótimos começando em y^0 .

Como $(y(t), z(t)) \in T$ $0 \leq t \leq T_f$, por viabilidade, nós temos por (65):

$$(82) \quad p^* \dot{z}(t) \leq \lambda^* p^* y(t) \quad \forall t \in [0, T_f] \text{ e, em parti-}$$

cular, pelo Lema (79), $\exists \quad 0 < \rho < \lambda^* \rightarrow$

$$(83) \quad p^* \dot{z}(t) \leq \rho p^* y(t) \text{ se } t \in L$$

Definamos $f: [0, T_f] \rightarrow \mathbb{R}_{++}$

$$f(t) = \begin{cases} \rho & \text{se } t \in L \subset [0, T_f] \\ \lambda^* & \text{se } t \in [0, T_f] - L \end{cases}$$

Como $z(t) = \dot{y}(t)$, (82) e (83) podem ser reunidas:

$$(84) \quad p^* \dot{y}(t) \leq f(t) p^* y(t), \quad p^* y(0) = y^0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

Consideremos também : (veja [11])

$$(85) \quad p^* \dot{x}(t) = f(t) p^* x(t), \quad p^* x(0) = y^0 \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$p^* x(t) = e^{\int_0^t f(s) ds} \cdot p^* y^0, \text{ pois:}$$

$$p^* \dot{x}(t) = f(t) e^{\int_0^t f(s) ds} \cdot p^* y^0 = f(t) e^{\int_0^t f(s) ds}$$

Agora, seja um $t_0 \in [0, T_f] \rightarrow p^*, x(t_0) = p^*, y(t_0)$

$$\begin{aligned} \text{Então } p^*, \dot{y}(t_0) &\leq f(t) p^*, y(t_0) = f(t) p^*, x(t_0) = \\ &= p^*, \dot{x}(t_0) \end{aligned}$$

Isto é, em qualquer "cruzamento", $p^*, \dot{y}(t_0) \leq p^*, \dot{x}(t_0)$

$$\therefore \text{ Se } \exists s_0 \in [0, T_f] \rightarrow p^*, y(s_0) \leq p^*, x(s_0)$$

$$\text{Então } p^*, y(t) \leq p^*, x(t) \quad \forall t \in [0, T_f] \rightarrow t \geq s_0$$

$$\text{Como } p^*, y(0) = p^*, x(0)$$

$$\therefore p^*, y(t) \leq p^*, x(t) \quad \forall t \in [0, T_f] \quad \text{ou seja:}$$

$$(86) \quad p^*, y(t) \leq p^*, y^0 e^{\int_0^t f(s) ds}$$

Logo (84), (86) \Rightarrow

$$p^*, \dot{y}(t) \leq f(t) p^*, y(t) \leq f(t) p^*, y^0 e^{\int_0^t f(s) ds}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{T_f} p^*, \dot{y}(t) dt &= p^*, y(T_f) - p^*, y^0 \leq p^*, y^0 \int_0^{T_f} f(t) e^{\int_0^t f(s) ds} dt = \\ &= p^*, y^0 e^{\int_0^{T_f} f(s) ds} = p^*, y^0 e^{\int_0^{T_f} f(t) dt} - p^*, y^0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (87) \quad p^*, y(T_f) \leq p^*, y^0 e^{\rho 1} \cdot e^{\lambda^*(T_f-1)}$$

Seja agora $\bar{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ definida por:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} r(t) & T_0 \geq t \geq 0 \\ e^{\lambda^*(t-T_0)} \zeta y^* & T_f - T_1 \geq t > T_0 \\ e^{\lambda^*[T_f-(T_0+T_1)]} \zeta w(t-(T_f-T_1)) & T_f \geq t > T_f-T_1 \end{cases}$$

onde $\{r(t)\}_0^{T_0}$ e $\{w(t)\}_0^{T_1}$ são processos viáveis tais que

$r(0) = y^0$, $r(T_0) = \zeta y^*$ e $w(0) = y^*$, o que é sempre possível

pelas hipóteses (68) e (76).

$$\text{Logo: } e^{\lambda^*[T_f-(T_0+T_1)]} \zeta w(0) = e^{\lambda^*[T_f-(T_0+T_1)]} \zeta y^*$$

Mas $\{\bar{y}(t)\}_0^{T_f}$ é viável, pois:

$$\begin{aligned} \{\bar{y}(t)\}_0^{T_f} &= \{r(t)\}_0^{T_0} \cup \left\{ e^{\lambda^*(t-T_0)} \zeta y^* \right\}_{T_0}^{T_f-T_1} \cup \\ &\cup \left\{ e^{\lambda^*[T_f-(T_0+T_1)]} \zeta w(t-(T_f-T_1)) \right\}_{T_f-T_1}^{T_f} \end{aligned}$$

Também, os dois primeiros conjuntos são evidentemente processos viáveis, assim como o terceiro:

$$\left\{ e^{\lambda^*[T_f-(T_0+T_1)]} \zeta w(t) \right\}_0^{T_1} \quad \text{porque } T \text{ é um cone.}$$

Agora, se $T_f \geq T_0 + T_1$ e o processo $\left\{ y(t) \right\}_0^{T_f}$ em questão é U-ótimo, existe $\tilde{u} \in U$ tal que $\tilde{u}(y(T_f))$ é máximo para todos os processos viáveis começando em y^0 .

Mas então, em particular:

$\tilde{u}(y(T_f)) \geq \tilde{u}(\bar{y}(T_f))$ onde ,

$$(88) \quad \tilde{u}(\bar{y}(T_f)) = e^{\lambda^*[T_f - (T_0 + T_1)]} \leq \tilde{u}(a) \geq \\ \geq e^{\lambda^*[T_f - (T_0 + T_1)]} \leq \hat{u} \quad \text{por (76)}$$

Então (88) \Rightarrow

$$(89) \quad \tilde{u}(y(T_f)) \geq e^{\lambda^*[T_f - (T_0 + T_1)]} \leq \hat{u} \quad \text{finalmente ,}$$

vemos que os primeiros membros de (87) e (89) são relacionados por:

$$(90) \quad \tilde{u}(y(T_f)) \leq C p^* \cdot y(T_f) \quad \text{por meio de (77)}$$

Sintetizando (87), (89) e (90) temos:

$$C p^* \cdot y^0 e^{\rho \cdot 1} \cdot e^{\lambda^*(T_f - 1)} \geq e^{\lambda^*[T_f - (T_0 + T_1)]} \leq \hat{u} \quad \text{ou:}$$

$$(91) \quad 0 < \frac{\leq \hat{u}}{e^{\lambda^*(T_0 + T_1)}} \leq C \left(\frac{e^\rho}{e^{\lambda^*}} \right)^1 p^* \cdot y^0$$

Como $1 > \frac{\rho}{\lambda^*} > 0$, de (91) nós conseguimos a majoração:

$$\log \zeta \hat{u} - \lambda^*(T_0 + T_1) \leq \log C p^* y^0 + 1(\rho - \lambda^*)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{\log \zeta \hat{u} - \log C p^* y^0 - \lambda^*(T_0 + T_1)}{\rho - \lambda^*}$$

Finalmente, $k = \max (T_0 + T_1, 1)$ **I**

Este k é independente dos processos U-ótimos, dependendo unicamente de \mathcal{E} . Provamos então a \mathcal{E} -proximidade uniforme dos processos U-ótimos exceto para um tempo de duração máxima k .

Isto nos dá informações sobre o comportamento dos processos U-ótimos para uma dada tecnologia (um dado conjunto transformação). Ou seja, das soluções de problemas de programação contínua em que as restrições e os funcionais objetivos satisfaçam certas condições.

5º CAPÍTULO

CONCLUSÕES

As soluções das versões contínuas, ainda que mais próximas da realidade do que as versões discretas, necessitam grande complexidade matemática para sua obtenção. Essa dificuldade é perceptível na tentativa de solução por equações diferenciais apresentada no 3º capítulo.

Se as dificuldades são grandes no caso de restrições lineares, com muito mais razão o serão no caso de problemas com restrições não lineares. Foi tentado então um novo enfoque, estabelecendo-se uma versão contínua de um teorema de "Turnpike" utilizado na Economia Matemática em processos discretos.

Como sugestão para pesquisas futuras poder-se-ia tentar / versões contínuas de outros Teoremas de "Turnpike", como o de Mc. Kenzie e o de Tsukui [8], onde algumas hipóteses restritivas como a (64) poderiam ser relaxadas.

APÊNDICE

DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS DO 12º CAPÍTULO (Verma [12])

LEMA: \hat{z} solução ótima \Rightarrow

$$\int_0^{T_f} a(t) \cdot y(t) dt > 0 \quad \text{não tem solução em } Q.$$

prova: (contradição)

Seja $y \in Q$ solução.

$$\Rightarrow z(t) = \hat{z}(t) + y(t) \in Z \quad e$$

$$\begin{aligned} \int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) dt &= \int_0^{T_f} a(t) \cdot (\hat{z}(t) + y(t)) dt > \\ &> \int_0^{T_f} a(t) \cdot \hat{z}(t) dt ! \quad \text{pois } \hat{z}(t) \text{ é ótimo} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA: O sistema de inequações:

$$y \geq 0$$

$$B y(t) \leq \int_0^t K y(s) ds$$

$$\int_0^{T_f} a(t) \cdot y(t) dt > 0$$

não tem solução em Q^n .

prova: (contradição)

Seja y solução.

Como \hat{z} é viável:

$$z(t) = \hat{z}(t) + y(t) \geq 0$$

$$\begin{aligned} B z(t) &= B \hat{z}(t) + B y(t) \leq c(t) + \int_0^t K \hat{z}(s) ds + \int_0^t K y(s) ds = \\ &= c(t) + \int_0^t K z(s) ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in Z$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } \int_0^{T_f} a(t)' z(t) dt &= \int_0^{T_f} a(t)' \hat{z}(t) dt + \\ &+ \int_0^{T_f} a(t)' y(t) dt > \int_0^{T_f} a(t)' \hat{z}(t) dt ! \blacksquare \end{aligned}$$

(92) TEOREMA: \hat{z} é uma solução ótima $\triangleq \Rightarrow$

$$a(t)' \hat{z}(t) \geq a(t)' z(t) \quad \forall t \in [0, T_f]$$

$$\forall z \in Z$$

Para provar esse teorema, necessitaremos de várias definições e Lemas auxiliares:

DEFINIÇÕES: Seja Q_1 uma classe de funções contínuas tais que

$$y \in Q_1 \quad \triangleq \Rightarrow$$

$$(a) \quad y \in Q^n$$

$$(b) \quad y_j = 0 \quad \text{se} \quad a_j(t) \neq 0 \quad \forall t \text{ e } j = 1, \dots, N$$

NOTA: $y = 0 \in Q_1$

$$Q_2 \triangleq \left\{ y \mid y(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad y \notin Q_1 \right\}$$

$$Q_3 \triangleq \left\{ y \mid y(t) \leq 0 \quad \forall t, \quad y \notin Q_1 \right\}$$

$$Q_4 \triangleq \left\{ y \mid y \in Q^n, \quad y \notin Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \right\}$$

$$(93) \quad \text{NOTA:} \quad Q \subset Q^n = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$$

NOTA: É óbvio que Q_4 consiste do conjunto das funções n -vetoriais contínuas que têm pelo menos uma das componentes trocando sinal pelo menos uma vez em $[0, T_f]$

Seja $y(t) \triangleq y^p(t) + y^n(t)$ onde

$$y_j^p(t) = y_j(t) \quad \text{se } y_j(t) \geq 0$$

e o zero de outra feita

$$y_j^n(t) = y_j(t) \quad \text{se } y_j(t) \leq 0$$

para $j = 1, \dots, N$

NOTA: y^p, y^n são contínuas em $[0, T_f]$ e têm as seguintes

propriedades:

$$(94) \quad y^p(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$$y^n(t) \leq 0 \quad \forall t$$

Acrescentaremos as seguintes hipóteses:

$$(95) \quad K \geq 0$$

$$a(t) \geq 0 \quad \forall t \quad (\text{não consideraremos o caso } a = 0)$$

$$(96) \quad \text{LEMA:} \quad Q \cap Q_2 = \emptyset$$

prova: (contradição)

Suponhamos que $\exists y \in Q \cap Q_2$

$$(97) \quad \text{então } z = \hat{z} + y \text{ é viável e}$$

$$(98) \quad \begin{aligned} \int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) dt &= \int_0^{T_f} a(t) \cdot \hat{z}(t) dt + \int_0^{T_f} a(t) \cdot y(t) dt \\ \therefore \int_0^{T_f} a(t) \cdot z(t) dt &> \int_0^{T_f} a(t) \cdot \hat{z}(t) dt \quad \text{já que} \end{aligned}$$

$$\int_0^{T_f} a(t) \cdot y(t) dt > 0 \quad \forall y \in Q_2. \text{ Isso completa a prova pois}$$

z por (97) e (98) contradiz a otimalidade de \hat{z} . ■

(99) LEMA: $Q \cap Q_4 = \emptyset$

prova: (contradição)

Seja $y \in Q \cap Q_4$. Então:

(100) $z = \hat{z} + y$ é viável. Agora:

(101) $z^+(t) = \max \{ \hat{z}(t), z(t) \}$. Claramente,

(102) z^+ é uma função contínua e

(103) $z^+(t) \geq 0$ já que $\hat{z}(t)$ e $z(t)$ o são.

Então, de (101):

(104) $z^+(t) = \hat{z}(t) + y^p(t)$

Para provar a viabilidade de z^+ , peguemos um componente arbitrário $z_j^+(t)$ em um instante de tempo arbitrário $t \in [0, T_f]$

Então:

a) $z_j^+(t) = z_j(t)$ ou

b) $z_j^+(t) = \hat{z}_j(t)$ ou

c) $z_j^+(t) = z_j(t) = \hat{z}_j(t)$

É suficiente considerar apenas os dois primeiros casos.

caso a): Como z é viável,

$$z_j^+(t) = z_j(t) \leq c_j(t) + \int_0^t K_j^* z(s) ds$$

Mas $z^+(t) \geq z(t) \quad \forall t$ por definição e

$K_j \geq 0$ por hipótese. Então,

$$(105) \quad z_j^+(t) \leq c_j(t) + \int_0^t K_j^* z^+(s) ds$$

caso b): Análogamente chegamos a:

$$\begin{aligned} z_j^+(t) &= \hat{z}_j(t) \leq c_j(t) + \int_0^t K_j^* \hat{z}(s) ds \\ \Rightarrow \\ (106) \quad z_j^+(t) &\leq c_j(t) + \int_0^t K_j^* z^+(s) ds \end{aligned}$$

Então, (102), (103), (105), (106) e o fato que t e j foram escolhidos arbitrariamente, \Rightarrow

(107) z^+ é uma solução viável.

Também, de (104)

$$(108) \quad \int_0^{T_f} a(t)^* z^+(t) dt = \int_0^{T_f} a(t)^* \hat{z}(t) dt + \int_0^{T_f} a(t)^* y^p(t) dt$$

Como $a, y^p \neq 0$ e $y^p \in Q_1 \Rightarrow$

$$\int_0^{T_f} a(t) \cdot y^p(t) dt > 0. \text{ Isto e (107) } \Rightarrow$$

$$(109) \quad \int_0^{T_f} a(t) \cdot z^+(t) dt > \int_0^{T_f} a(t) \cdot \hat{z}(t) dt$$

Mas a prova está então completa, pois (107) e (109) contradizem a otimalidade de \hat{z} .

NOTA: (93), LEMA(96) e LEMA(99) \Rightarrow

$$(110) \quad Q \subset Q_1 \cup Q_3$$

$$(111) \quad \underline{\text{LEMA:}} \quad \text{Se } z(t) = \hat{z}(t) + y(t) \text{ e } y \in Q \cap Q_1$$

$$\text{então } a(t) \cdot \hat{z}(t) = a(t) \cdot z(t) \quad \forall t$$

prova: Por definição de Q_1 , $a(t) \cdot y(t) = 0$. ■

$$(112) \quad \underline{\text{LEMA:}} \quad \text{Se } z(t) = \hat{z}(t) + y(t) \text{ e } y \in Q \cap Q_3$$

$$\text{então } a(t) \cdot \hat{z}(t) \geq a(t) \cdot z(t) \quad \forall t$$

prova: Como $y \in Q_3$, fica claro da definição e de (95)

que $a(t) \cdot y(t) \leq 0$. ■

NOTA: Notemos que embora o LEMA (112) não proporcione uma inequação estrita, a definição de Q_3 e (95) asseguram que o produto escalar será menor que zero no mínimo em um subintervalo infinitesimal, resultando:

$$\forall y \in Q_3, \quad \int_0^{T_f} a(t)' \hat{z}(t) dt > \int_0^{T_f} a(t)' z(t) dt.$$

prova do TEOREMA (92): Suficiência:

dado que $a(t)' \hat{z}(t) \geq a(t)' z(t) \quad \forall z \text{ vi}$

ável e evidentemente \hat{z} é viável,

$$a(t)' \hat{z}(t) - a(t)' z(t) = f(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \int_0^{T_f} a(t)' \hat{z}(t) dt \geq \int_0^{T_f} a(t)' z(t) dt$$

Isto prova a otimalidade de \hat{z} .

Necessidade:

Se \hat{z} é ótimo, então valem os Lemas (111) e (112).

Isto, junto com (110) nos dá:

$$a(t)' \hat{z}(t) \geq a(t)' z(t) \quad \forall z \in Z. \quad \blacksquare$$

REFERÊNCIAS

- 1 BELMAN, R., Dynamic Programing, Princeton University Press, 1957
- 2 LEVINSON, N., A Class of Continuous Linear Programming Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1966
- 3 GRINOLD, R. C., Symmetric Duality for Continuous Linear Programs, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1970
- 4 TYNDALL, W. F., A Duality Theorem for a Class of Continuous Linear Programming Problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1965
- 5 TYNDALL, W. F., An Extended Duality Theorem for Continuous Linear Programming Problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1967
- 6 LARSEN, A. and POLAK, B. , Some Sufficient Conditions for Continuous Linear - Programming Problems, ERL Technical Memorandum M - 123, University of California, Berkeley, 1965
- 7 NIKAIDO, H. , Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, 1968

- 8 BURMEISTER, E. and DOBELL, A. R.; Mathematical Theories of Economic Growth, The Macmillan Company, 1970
- 9 ARDUINO, A., Determinação de uma Raia de von Neumann para a Expansão da Economia Brasileira, Tese de M. Sc., COPPE, 1971
- 10 KARLIN, S. , Mathematical Methods and Theory in Games , Programming and Economics, Addison - Wesley, Reading, 1959
- 11 WALTER, W., Differential and Integral Inequalities, Springer - Verlag, 1970
- 12 VERMA, J. P., Necessary Conditions for Continuous Linear Programming Problems, M. Sc. Thesis, University of California, Berkeley, 1966